数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 95-98

Moonshine module and codes over $\mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

講演では $\mathbf{Z}_6 = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ 上の符号に関するムーンシャイン加群の分解を与えたが, 本稿ではより一般的な $\mathbf{Z}_{2k} = \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$ $(k \geq 2)$ 上の符号に関する分解を与える. その応用として, モンスター単純群のいくつかの元の作用についての考察をする. 詳細は [Sh] をご覧頂きたい. 頂点作用素代数の一般論は [Bo, FLM, MN], $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の符号に関する基本的な定義等は [BDHO, DHS] を参照して頂きたい.

頂点作用素代数 (VOA) の公理は Borcherds, Frenkel らによって与えられて, 研究されてきた. 特にムーンシャイン加群 $(V^\natural)$ は, VOA の最も重要な例の一つであり, その自己同型群はモンスター単純群である. $V^\natural$ は, 部分頂点作用素代数 (部分 VOA) として中心電荷 1/2 のヴィラソロ VOA $L(1/2,0)$ の 48 個のコピーのテンソル積を含んでいる (cf. [DGH]). さらにその加群としての $V^\natural$ の既約分解を用いて, $V^\natural$ の構造について研究がなされている.

$L(1/2,0)$ は中心電荷 1/2 の W_2 代数であるので, W_n 代数のユニタリ系列の最初元について, 同様の考察をするべきである ([Ma]). 中心電荷 1 の W_4 代数は, ノルム 6 の元で生成される格子 L に付随する格子 VOAV_L の L の自己同型 -1 から誘導される V_L の自己同型の固定部分空間 V_L^+ として実現される事が知られている. そこで, ノルム $2k$ $(k \geq 2)$ の元で生成される一次元格子を L として V_L^+ について考える. [DN] より, 既約 V_L^+-加群は

$$\{V_L^{\pm}, V_{\alpha/2+L}^{\pm}, V_{r\alpha/2k+L}, V_L^{T_i,\pm} | 1 \leq r \leq k-1\ , i = 0,1\}$$

の $k+7$ 個のいずれかと同型である.

V_Λ^+ をリーチ格子 Λ から構成される格子 VOAV_Λ の Λ の自己同型 -1 から誘導される V_Λ の自己同型の固定部分空間として, $V_\Lambda^{T,+}$ を V_Λ の twisted 加群 V_Λ^T の位数 2 の自己同型による固定部分空間としたときに, ムーンシャイン加群は $V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus V_\Lambda^{T,+}$ として構成される ([FLM]).

Λ の部分集合で, 24 個の互いに直交するノルム $2k$ の元たちの ± 1 倍した集合を $2k$-frame と呼ぶことにする. $2k$-frame を考えることで, V_Λ^+ は部分 VOA として V_L^+ の 24 個のコピーのテンソル積を含むことがわかる. また, $V^\natural$ の $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群としての分解は直接計算できる. その表示は $\mathbf{Z}_{2k} = \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$ 上の符号を用いると見やすくなる.

Λ の自己同型群は $2k$-frame の集合上に作用するので，その軌道により同値類を定め，$\mathbf{Z}_{2k} = \mathbf{Z}/2k\mathbf{Z}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号の集合上に座標の置換と任意の成分の -1 倍で移りあうの符号を同値として同値類を定める．

命題 1. *$2k$-frame* の同値類と $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の *extremal Type II* 符号の同値集合との間に一対一対応がある．

証明. $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の符号から格子を構成する方法の 1 つである generalized Construction A を考えることで長さ 24 の extremal Type II 符号の同値類からリーチ格子の $2k$-frame の同値類への写像を得る．その逆写像を考える．リーチ格子の $2k$-frame に対して, それが生成するリーチ格子の部分格子を N とした時に

$$\Lambda/N \subset N^\circ/N \cong \mathbf{Z}_{2k}^{24}$$

から, $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の符号が得られる．ただし N° は N の双対格子とする．リーチ格子の性質から, Λ/N は $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の extremal Type II 符号であることがわかる．さらに, generalized Construction A に付随する写像の逆写像になる事が確かめられる． □

次が主定理である．

定理 2. C を $\mathbf{Z}_{2k}$ 上の長さ 24 の *extremal Type II* 符号として, $C_2 = \{(c_1, \ldots, c_{24}) \in C | c_i = 0 \pmod{k} \text{ for all i}\}$ と置き, 二進符号と見る．$m = \dim C_2$ とおく．

(1) 部分 *VOA* としての次のような埋め込みが存在する．

$$V^\natural \supset V_\Lambda^+ \supset (V_L^+)^{\otimes 24}.$$

(2) V_Λ^+ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^+ \cong \bigoplus_{c \in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = +}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2+L}^{e_i} \oplus \frac{1}{2} \bigoplus_{c \in C \setminus C_2} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i\alpha/2k+L}.$$

(3) $V_\Lambda^{T,+}$ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$-加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^{T,+} \cong \bigoplus_{c \in C_2^\perp} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = -}} \bigotimes_{i=1}^{24} 2^{m-12} V_L^{T_{c_i}, e_i}.$$

この定理の応用としてモンスター単純群の共役類 $4A$, $2B$ の元の作用を各既約成分上にスカラー倍をする事で与える．

V_L^+ のフュージョン規則は [Ab] で決定されている．それを用いて次のような命題を得る (cf. [Ma]).

命題 3. (1) k を奇数とする. V_L^+ のフュージョン代数上で

$$\begin{aligned} 1 \quad &\text{on} \quad \{V_L^{\pm}, V_{i\alpha/k+L} | 1 \le i \le (k-1)/2\}, \\ -1 \quad &\text{on} \quad \{V_{\alpha/2+L}^{\pm}, V_{(2i-1)\alpha/2k+L} | 1 \le i \le (k-1)/2\}, \\ \sqrt{-1} \quad &\text{on} \quad \{V_L^{T_0,\pm}\}, \\ -\sqrt{-1} \quad &\text{on} \quad \{V_L^{T_1,\pm}\} \end{aligned}$$

のように定義される線形写像は自己同型である.
(2) k を偶数とする. V_L^+ のフュージョン代数上で

$$\begin{aligned} 1 \quad &\text{on} \quad \{V_L^{\pm}, V_{\alpha/2+L}^{\pm}, V_{i\alpha/2k+L} | 1 \le i \le (k-1)\}, \\ -1 \quad &\text{on} \quad \{V_L^{T_0,\pm}, V_L^{T_1,\pm}\} \end{aligned}$$

のように定義される線形写像は自己同型である.

Γ を V_L^+ の既約加群全体の集合として,

$$V^\natural = \bigoplus_{(W_1,\ldots,W_{24})\in\Gamma^{24}} m_{W_1,\ldots W_{24}} W_1 \otimes \cdots \otimes W_{24}$$

のような既約分解が与えられたとする.
各既約加群上に, テンソル積の i 番目の V_L^+ 加群に対応するスカラー倍 (cf. 命題3) をする $V^\natural$ の線形写像を σ_i と置く. すると, σ_i はフュージョン積を保つので次のような命題を得る.

命題 4. σ_i は $V^\natural$ の *VOA* としての自己同型である.

命題 4 を定理 2 に適用してみる. k が偶数の時は, σ_i は V_Λ^+ 上で 1, $V_\Lambda^{T,+}$ 上で -1 として作用する. よって共役類 $2B$ の元となる. k が奇数の時は, σ_i^2 が共役類 $2B$ の元となり, モンスター単純群における中心化群は $2_+^{1+24}.Conway_1$ と同型となる ([FLM]). ただし, $2_+^{1+24}.Conway_1$ は, $Conway_1$ (Conway 群のうちで単純かつ位数最大の群) の extra-special 群 2_+^{1+24} による不分裂拡大とする. σ_i は $Conway_1$ の作用とした見たときには自明な作用になるので, $\sigma_i \in 2_+^{1+24}$ を得る. 2_+^{1+24} は共役類 $4A$, $2A$, $2B$, $1A$ の元しか含まないことが知られているので, 次の命題を得る.

命題 5. 定理 2 で得られた分解において, $\sigma_i \in 2_+^{1+24}$. 特に k が奇数の時は, σ_i は共役類 $4A$ の元である.

注意 6. σ_i を用いて, *McKay-Thompson* 級数の明示的な表示を与える事が出来る.

参考文献

[Ab] T. Abe, Fusion Rules for the Charge Conjugation Orbifold, Preprint.

[BDHO] E. Bannai, S.T. Dougherty, M. Harada, and M. Oura, Type II Codes, Even Unimodular Lattices, and Invariant Rings, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**, (1999), 1194-1205.

[Bo] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A*, **83**, (1986), 3068-3071.

[CS] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, Sphere Packing, Lattices and Groups, 3rd Edition, Springer, New York, 1999.

[DGH] C. Dong, R. L. Griess Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and moonshine module, *Comm. Math. Phys.*, **193**, (1998), 407-448.

[DHS] S. T. Dougherty, M. Harada and P. Solé, Self-dual codes over rings and the Chinese remainder theorem. *J. Math. Hokkaido Univ.* **28** (1999), 253-283.

[DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L, *Comm. Math. Phys.*, **202**, (1999), 169-195.

[FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, (1988).

[Ma] A. Matsuo, Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Larger Symmetry, Preprint.

[MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields, MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, (1999).

[Sh] H. Shimakura, Decomposition of the Moonshine Module with respect to a code over $\mathbf{Z}_{2k}$, Preprint, math.QA/0104160.